Analytische Bemerkungen *

Leonhard Euler

§1 Unter allen anderen Dingen, dich ich überall verstreut über Kettenbrüche mitgeteilt habe, scheint diese Form besonders bemerkenswert

$$1+\cfrac{n}{2+\cfrac{n+1}{3+\cfrac{n+2}{4+\cfrac{n+3}{5+\cfrac{n+4}{6+\text{etc.}}}}}}$$

deren Wert, sooft n eine ganze Zahl ist, auf die folgende Weise dargeboten werden kann, während e die Zahl bezeichnet, deren Logarithmus die Einheit ist, dass gilt

$$e = 2,718281828459045:$$

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{3+\cfrac{3}{4+\cfrac{4}{5+\text{etc.}}}}} = \frac{1}{e-2},$$

*Originaltitel: "Observationes analyticae", erstmals publiziert in „*Opuscula anylytica 1*, 1783, pp. 85-120", Nachdruck in „*Opera Omnia*: Series 1, Volume 15, pp. 400 - 434 ", Eneström-Nummer E553, übersetzt von: Alexander Aycock, Textsatz: Arseny Skryagin, im Rahmen des Projektes „Euler-Kreis Mainz"

$$1+\cfrac{2}{2+\cfrac{3}{3+\cfrac{4}{4+\cfrac{5}{5+\text{etc.}}}}}=e-1,$$

$$1+\cfrac{3}{2+\cfrac{4}{3+\cfrac{5}{4+\cfrac{6}{5+\text{etc.}}}}}=2,$$

$$1+\cfrac{4}{2+\cfrac{5}{3+\cfrac{6}{4+\cfrac{7}{5+\text{etc.}}}}}=\frac{9}{4},$$

$$1+\cfrac{5}{2+\cfrac{6}{3+\cfrac{7}{4+\cfrac{8}{5+\text{etc.}}}}}=\frac{52}{21},$$

$$1+\cfrac{6}{2+\cfrac{7}{3+\cfrac{8}{4+\cfrac{9}{5+\text{etc.}}}}}=\frac{365}{136},$$

$$1+\cfrac{7}{2+\cfrac{8}{3+\cfrac{9}{4+\cfrac{10}{5+\text{etc.}}}}}=\frac{3006}{1045},$$

$$1+\cfrac{8}{2+\cfrac{9}{3+\cfrac{10}{4+\cfrac{11}{5+\text{etc.}}}}}=\frac{28357}{9276},$$

wo es auf vollkommen einzigartige Weise passiert, dass die zwei ersten die transzendente Zahl e verwickeln, während alle folgenden in rationalen Zahlen ausgedrückt werden.

§2 Dies scheint umso wundersamer, weil auch die vorausgehenden Fälle, wo für n entweder die Null oder negative Zahlen festgelegt werden, in rationalen Werten enthalten sind, in welchen Fällen freilich die Form des Kettenbruches abbricht. Es wird nämlich gelten

$$1+\cfrac{0}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{4+\text{etc.}}}}=1,$$

$$1-\cfrac{1}{2+\cfrac{0}{3+\cfrac{1}{4+\text{etc.}}}}=\frac{1}{2},$$

$$1-\cfrac{2}{2-\cfrac{1}{3+\cfrac{0}{4+\text{etc.}}}}=-\frac{1}{5},$$

$$1-\cfrac{3}{2-\cfrac{2}{3-\cfrac{1}{4+\cfrac{0}{5+\text{etc.}}}}}=-\frac{19}{14},$$

$$1-\cfrac{4}{2-\cfrac{3}{3-\cfrac{2}{4-\cfrac{1}{5+0}}}}=-\frac{151}{37},$$

$$1-\cfrac{5}{2-\cfrac{4}{3-\cfrac{3}{4-\cfrac{2}{5-\cfrac{1}{6+0}}}}}=-\frac{1091}{34}.$$

Nach welchem Gesetz also so diese Werte wie die vorhergehenden miteinander zusammenhängen, glaube ich, dass es nicht unpassend sein wird, es gezeigt zu haben. Es wird aber besonders förderlich sein, die Methode dargestellt zu haben, mit welcher diese Werte ausfindig gemacht werden können.

§3 Zuerst bemerke ich also, wenn für irgendeine Zahl n der Wert des Kettenbruches so angezeigt wird

$$f(n)=1+\cfrac{n}{2+\cfrac{n+1}{3+\cfrac{n+2}{4+\cfrac{n+3}{5+\text{etc.}}}}}$$

dass sein wird

$$f(n+1) = \frac{n(f(n)+1)}{f(n)+n-1},$$

die Gültigkeit wovon in den aufgelisteten Werten erkannt wird, weil gilt

$$f(1) = \frac{1}{e-2}, \quad f(2) = e-1, \quad f(3) = 2, \quad f(4) = \frac{9}{4},$$

$$f(5) = \frac{52}{21}, \quad f(6) = \frac{365}{136}, \quad f(7) = \frac{3006}{1045}, \quad f(8) = \frac{28357}{9276}$$

und für die vorausgehenden

$$f(0) = 1, \quad f(-1) = \frac{1}{2}, \quad f(-2) = -\frac{1}{5}, \quad f(-3) = -\frac{19}{14},$$

$$f(-4) = -\frac{151}{37}, \quad f(-5) = -\frac{1091}{34}, \quad f(-6) = -\frac{7841}{887}.$$

Diese zwischen zwei benachbarten Werten einhergehende Relation verhindert nicht, dass sie in den Fällen $n = 1$ und $n = 2$ transzendent sind. Denn nach Setzen von

$$n = 0$$

wird

$$f(1) = \frac{0(1+1)}{1+0-1} = \frac{0}{0},$$

welcher Ausdruck dem Wert

$$\frac{1}{e-2}$$

nicht widerspricht, auch wenn dieser daher nicht gefunden werden kann. Des Weiteren geht nach Setzen von

$$n = 2$$

hervor

$$f(3) = 2\frac{(f(2)+1)}{f(2)+1} = 2,$$

so dass der Wert

$$f(2) = e - 1$$

selbst nicht in die Rechnung eingeht.

§4 Das Ausfindigmachen dieser Werte scheint aber nicht gerade leicht zu sein; daher werde ich ausführlich erklären, wie ich zu ihnen gelangt bin, weil ja die Methode, die ich gebraucht habe, sich um Vieles weiter erstreckt und vielleicht zu anderen ansonsten verschlossenen Betrachtungen führen kann. Ich habe also die zwei unbestimmten Zahlen m und n genommen und eine gewisse Funktion derer, die p sei, betrachtet, woher ich ähliche Funktionen derselben Zahlen, die entweder um eine oder mehrere Einheiten vermehrt worden sind, gebildet habe, welche ich nach Nehmen des Buchstabens φ für das Zeichen dieser Funktion so darstelle:

$$
\begin{array}{llll}
p = \varphi(m \quad \text{und } n), & p' = \varphi(m \quad \text{und } n+1), & p'' = \varphi(m \quad \text{und } n+2), \\
q = \varphi(m+1 \text{ und } n), & q' = \varphi(m+1 \text{ und } n+1), & q'' = \varphi(m+1 \text{ und } n+2), \\
r = \varphi(m+2 \text{ und } n), & r' = \varphi(m+2 \text{ und } n+1), & r'' = \varphi(m+2 \text{ und } n+2), \\
s = \varphi(m+3 \text{ und } n), & s' = \varphi(m+3 \text{ und } n+1), & r'' = \varphi(m+3 \text{ und } n+2) \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
$$

Aber die Funktion φ setze ich fest von solcher Beschaffenheit zu sein, dass gilt

$$p = Am \qquad + Bn + C + \frac{Dnn + En + F}{p'};$$

es wird sein

$$
\begin{aligned}
q &= A(m+1) + Bn + C + \frac{Dnn + En + F}{q'}, \\
r &= A(m+2) + Bn + C + \frac{Dnn + En + F}{r'}, \\
s &= A(m+3) + Bn + C + \frac{Dnn + En + F}{s'} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

§5 Weil also p', q', r', s' etc. aus p, q, r, s etc. entspringen, wenn unter Beibehalt der Zahl m die andere um die Einheit vermehrt wird, wird auf die gleiche Weise gelten

$$
\begin{aligned}
p' &= Am \qquad\qquad + B(n+1) + C + \frac{D(n+1)^2 + E(n+1) + F}{p''},\\
q' &= A(m+1) + B(n+1) + C + \frac{D(n+1)^2 + E(n+1) + F}{q''},\\
r' &= A(m+2) + B(n+1) + C + \frac{D(n+1)^2 + E(n+1) + F}{r''}
\end{aligned}
$$

etc.;

dann aber wegen desselben Grundes

$$
\begin{aligned}
p'' &= Am \qquad\qquad + B(n+1) + C + \frac{D(n+2)^2 + E(n+2) + F}{p'''},\\
q'' &= A(m+1) + B(n+2) + C + \frac{D(n+2)^2 + E(n+2) + F}{q'''},\\
r'' &= A(m+2) + B(n+2) + C + \frac{D(n+2)^2 + E(n+2) + F}{r'''}
\end{aligned}
$$

etc.

sowie

$$
\begin{aligned}
p''' &= Am \qquad\qquad + B(n+3) + C + \frac{D(n+3)^2 + E(n+3) + F}{p''''},\\
q''' &= A(m+1) + B(n+3) + C + \frac{D(n+3)^2 + E(n+3) + F}{q''''},\\
r''' &= A(m+2) + B(n+3) + C + \frac{D(n+3)^2 + E(n+3) + F}{r''''}
\end{aligned}
$$

etc.

und so weiter beim Fortschreiten.

§6 Daher wir also die Funktion p auf die folgende Weise durch einen unendlichen Kettenbruch ausgedrückt werden

$$p = Am+Bn+C+\cfrac{Dn^2+En+F}{Am+B(n+1)+C+\cfrac{D(n+1)^2+E(n+1)+F}{Am+B(n+2)+C+\cfrac{D(n+2)^2+E(n+2)+F}{Am+B(n+3)+C+\text{etc.}}}}$$

woher nach Festhalten von n, wenn anstelle von m nacheinander die Zahlen $m+1$, $m+2$, $m+3$ etc. geschrieben werden, die Werte der Brüche q, r, s, t durch ähnliche Kettenbrüche ausgedrückt hervorgehen werden. Nun wird also gesucht, eine Relation von welcher Art zwischen den Funktionen p und q bestehen wird. Nach Finden von dieser wird durch die obere Analogie zugleich die Relation zwischen allen hier dargebotenen Funktionen bekannt werden. Weil dies a priori zu schwer zu bestimmen scheint, glaube ich, dass man von einer Vermutung aus beginnen muss.

§7 Wir wollen also sehen, ob zwischen p und q eine Relation von dieser Art festgelegt werden kann

$$\begin{gathered}(p+(\alpha+A)m+(\beta+B)n+\gamma-C)(q+(\delta-A)m+(\varepsilon-B)n+\zeta-A-C)\\ =\lambda mm+\mu m+\nu,\end{gathered}$$

woher nach Festhalten von m, wenn anstelle von n danach $n+1$ geschrieben wird, sein wird

$$\begin{gathered}(p'+(\alpha-A)m+(\beta+B)(n+1)+\gamma-C)\\ \times(q'+(\delta-A)m+(\varepsilon+B)(n+1)+\zeta-A-C)\\ =\lambda mm+\mu m+\nu\end{gathered}$$

Aber wenn dort für p und q die oberen Werte durch p' und q' eingesetzt werden, wird hervorgehen

$$\left(\alpha m + \beta n + \gamma + \frac{Dnn + En + F}{p'}\right)\left(\delta m + \varepsilon n + \zeta + \frac{Dnn + En + F}{q'}\right)$$
$$= \lambda mm + \mu m + \nu,$$

welche in diese entwickelt wird

$$(\alpha m + \beta n + \gamma)(\delta m + \varepsilon n + \zeta)p'q' - (\lambda mm + \mu m + \nu)p'q'$$

$$\begin{aligned}
&+ (\alpha m \quad + \beta n + \gamma) \ (Dnn + En + F)p' \\
&+ (\delta m \quad + \varepsilon n \ + \zeta) \ (Dnn + En + F)q' \\
&+ (Dnn + En + F)^2 = 0,
\end{aligned}$$

welche mit jener übereinstimmen muss. Daher ist es klar, dass gelten muss

$$(\alpha m + \beta n + \gamma)(\delta m + \varepsilon n + \zeta) - \lambda mm - \mu m - \nu = \theta(Dnn + En + F),$$

dass nach Division durch $\theta(Dnn + En + F)$ wird

$$p'q' + \frac{1}{\theta}(\alpha m + \beta n + \gamma)p' + \frac{1}{\theta}(\delta m + \varepsilon n + \zeta)q' + \frac{1}{\theta}(Dnn + En + F) = 0,$$

welche durch Faktoren dargestellt so dargeboten werde

$$\left(p' + \frac{\delta m + \varepsilon n + \zeta}{\theta}\right)\left(q' + \frac{\alpha m + \beta n + \gamma}{\theta}\right)$$
$$= \frac{(\alpha m + \beta n + \gamma)(\delta m + \varepsilon n + \zeta)}{\theta\theta} - \frac{1}{\theta}(Dnn + En + F)$$

oder

$$\left(p' + \frac{\delta m + \varepsilon n + \zeta}{\theta}\right)\left(q' + \frac{\alpha m + \beta n + \gamma}{\theta}\right) = \frac{\lambda mm + \mu m + \nu}{\theta\theta}.$$

§8 Es werde diese Formel mit der ersten verglichen

$$\begin{gathered}(p' + (\alpha - A)m + (\beta + B)(n+1) + \gamma - C)\\ \times(q' + (\delta - A)m + (\varepsilon + B)(n+1) + \zeta - A - C)\\ = \lambda mm + \mu m + \nu,\end{gathered}$$

woher sofort erschlossen wird

$$\theta\theta = 1,$$

und daher entweder

$$\theta = 1 \quad \text{oder} \quad \theta = -1.$$

Dann muss aber gelten

$$\begin{gathered}\delta = \theta(\alpha - A), \quad \varepsilon = \theta(\beta - B), \quad \zeta = \theta(\beta + \gamma - B - C),\\ \alpha = \theta(\delta - A), \quad \beta = \theta(\varepsilon - B), \quad \gamma = \theta(\varepsilon + \zeta - A - B - C).\end{gathered}$$

Weil also der Wert $\theta = 1$ nicht passend ist, wollen wir setzen

$$\theta = -1,$$

dass wir haben

$$\alpha + \delta = A, \quad \beta + \varepsilon = B, \quad \beta + \gamma + \zeta = B + C \quad \text{und} \quad \gamma + \varepsilon + \zeta = A + B + C$$

und daher

$$\varepsilon - \beta = A;$$

also

$$\beta = \frac{1}{2}(B - A), \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(A + B) \quad \text{und} \quad \gamma + \zeta = \frac{1}{2}(A + B) + C.$$

Außerdem ist aber diese Bedingung zu erfüllen

$$\begin{gathered}(\alpha m + \beta n + \gamma)(\delta m + \varepsilon n + \zeta) = \lambda mm + \mu m + \nu - Dnn - En - F \\ = \alpha\delta mm + \alpha\varepsilon mn + \alpha\zeta m + \beta\zeta n + \gamma\zeta + \beta\varepsilon nn + \beta\delta mn + \gamma\delta m + \gamma\varepsilon n.\end{gathered}$$

Es wird also sein

$$\begin{gathered}\lambda = \alpha\delta, \quad \mu = \alpha\zeta + \gamma\delta, \quad D = -\beta\varepsilon, \quad E = -\beta\zeta - \gamma\varepsilon, \\ \nu - F = \gamma\zeta \quad \text{und} \quad \alpha\varepsilon + \beta\delta = 0,\end{gathered}$$

woher zuerst wird

$$D = -\beta\varepsilon = \frac{1}{4}(AA - BB),$$

des Weiteren

$$\frac{1}{2}\alpha(A+B) + \frac{1}{2}\delta(B-A) = 0$$

oder

$$\delta = \frac{A+B}{A-B}\alpha$$

und daher

$$\alpha = \frac{1}{2}(A-B) \quad \text{und} \quad \delta = \frac{1}{2}(A+B).$$

Dann wird aber sein

$$E + \frac{1}{2}\zeta(B-A) + \frac{1}{2}\gamma(A+B) = 0$$

oder

$$E + \frac{1}{4}B(A+B) + \frac{1}{2}BC + \frac{1}{2}A(\gamma - \zeta) = 0$$

und daher

$$\zeta - \gamma = \frac{BC}{A} + \frac{B(A+B)}{2A} + \frac{2E}{A};$$

also

$$\zeta = \frac{1}{4}(A+B) + \frac{1}{2}C + \frac{BC}{2A} + \frac{B(A+B)}{4A} + \frac{E}{A},$$
$$\gamma = \frac{1}{4}(A+B) + \frac{1}{2}C - \frac{BC}{2A} - \frac{B(A+B)}{4A} - \frac{E}{A}$$

oder auf diese Weise

$$\zeta = \frac{1}{4}(A+B+2C)\left(1+\frac{B}{A}\right) + \frac{E}{A} = \frac{(A+B)(A+B+2C)}{4A} + \frac{E}{A},$$
$$\gamma = \frac{1}{4}(A+B+2C)\left(1-\frac{B}{A}\right) - \frac{E}{A} = \frac{(A-B)(A+B+2C)}{4A} + \frac{E}{A}.$$

§9 Die zwischen p und q angenommene Relation kann nur bestehen, wenn gilt

$$D = \frac{1}{4}(AA - DD);$$

wenn dieser Wert D zugeteilt wird, werden sich die folgenden Buchstaben so verhalten:

$$\alpha = \frac{1}{2}(A-B), \quad \delta = \frac{1}{2}(A+B), \quad \gamma = \frac{(A-B)(A+B+2C)}{4A} - \frac{E}{A},$$
$$\delta = -\frac{1}{2}(A-B), \quad \varepsilon = \frac{1}{2}(A+B), \quad \zeta = \frac{(A+B)(A+B+2C)}{4A} + \frac{E}{A},$$
$$\lambda = \frac{1}{4}(AA-BB) = D, \quad \mu = \frac{(AA-BB)(A+B+2C)}{4A} - \frac{BE}{A},$$

$$\nu = \frac{(AA-BB)(A+B+2C)^2}{16AA} - \frac{BE(A+B+2C)}{2AA} - \frac{EE}{AA} + F$$

und daher weiter

$$\alpha - A = -\frac{1}{2}(A+B), \quad \beta - B = -\frac{1}{2}(A+B),$$

$$\gamma - C = \frac{AA-BB}{4A} - \frac{C(A+B)}{2A} - \frac{E}{A},$$

$$\delta - A = -\frac{1}{2}(A-B), \quad \varepsilon - B = \frac{1}{2}(A-B),$$

$$\zeta - A - C = -\frac{(A-B)(3A+B)}{4A} - \frac{C(A-B)}{2A} + \frac{E}{A},$$

woher zwischen p und q diese Gleichung resultiert

$$\left(p - \frac{1}{2}(A+B)(m+n) + \frac{AA-BB}{4A} - \frac{C(A+B)}{2A} - \frac{E}{A}\right)$$
$$\times\left(q - \frac{1}{2}(A-B)(m-n) - \frac{(A-B)(3A+B)}{4A} - \frac{C(A-B)}{2A} + \frac{E}{A}\right)$$
$$\lambda m^2 + \mu m + \nu.$$

§10 Wir wollen zur Abkürzung festlegen

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{(A+B)\,(A-B)}{4A} - \frac{C(A+B)}{2A} - \frac{E}{A},\\
Q &= \frac{(A+B)(3A+B)}{4A} + \frac{C(A-B)}{2A} - \frac{E}{A},
\end{aligned}
$$

dass gilt

$$
\left(p-\frac{1}{2}(A+B)(m+n)+P\right)\left(q-\frac{1}{2}(A-B)(m-n)-Q\right)
$$

$$
= \lambda m^2 + \mu m + \nu;
$$

es wird sein

$$
p = \frac{1}{2}(A+B)(m+n) - P + \frac{\lambda m^2 + \mu m + \nu}{q - \frac{1}{2}(A-B)(m-n) - Q}.
$$

Auf die gleiche Weise ist aber

$$
\begin{aligned}
q &= \frac{1}{2}(A+B)(m+n) + \frac{1}{2}(A+B) - P + \frac{\lambda(m+1)^2 + \mu(m+1) + \nu}{r - \frac{1}{2}(A-B)(m-n) - \frac{1}{2}(A-B) - Q},\\
q &= \frac{1}{2}(A+B)(m+n) + \quad (A+B) - P + \frac{\lambda(m+2)^2 + \mu(m+2) + \nu}{s - \frac{1}{2}(A-B)(m-n) - \quad (A-B) - Q},
\end{aligned}
$$

woher wird

$$
q - \frac{1}{2}(A-B)(m-n) - Q = Bm + An + \frac{1}{2}(A+B) - P - Q
$$

$$+\frac{\lambda(m+1)^2+\mu(m+1)+\nu}{r-\frac{1}{2}(A-B)(m-n)-\frac{1}{2}(A-B)-Q},$$

$$r-\frac{1}{2}(A-B)(m-n)-\frac{1}{2}(A-B)-Q=Bm+An+\frac{1}{2}(A+3B)-P-Q$$
$$+\frac{\lambda(m+2)^2+\mu(m+2)+\nu}{s-\frac{1}{2}(A-B)(m-n)-\quad(A-B)-Q}.$$

Es ist aber

$$P+Q=\frac{(A-B)(2A+B)}{2A}-\frac{BC}{A}-\frac{2E}{A}$$

und daher

$$q-\frac{1}{2}(A-B)(m-n)-Q=Bm+An+B+\frac{BB-AA+2BC+4E}{2A}.$$

Wenn daher der Kürze wegen festgelegt wird

$$\frac{BB-AA+2BC+4E}{2A}=G,$$

wird sein

$$p=\frac{1}{2}(A+B)(m+n)+\frac{BB-AA}{4A}+\frac{C(A+B)}{2A}+\frac{E}{A}$$

$$+\cfrac{\lambda m^2+\mu m+\nu}{B(m+1)+An+G+\cfrac{\lambda(m+1)^2+\mu(m+1)+\nu}{B(m+2)+An+G+\cfrac{\lambda(m+2)^2+\mu(m+2)+\nu}{B(m+3)+An+G+\text{etc.}}}}$$

oder durch Einführen des Wertes G

$$p = \frac{1}{2}(A+B)(m+n) + \frac{1}{2}(C+G)$$

$$+\cfrac{\lambda m^2 + \mu m + \nu}{B(m+1) + An + G + \cfrac{\lambda(m+1)^2 + \mu(m+1) + \nu}{B(m+2) + An + G + \cfrac{\lambda(m+2)^2 + \mu(m+2) + \nu}{B(m+3) + An + G + \text{etc.}}}}$$

Dann wird aber sein

$$P = -\frac{1}{2}(C+G) \quad \text{und} \quad Q = \frac{1}{2}(A-B) + \frac{1}{2}(C-G)$$

und daher

$$\left(p - \frac{1}{2}(A+B)(m+n) - \frac{1}{2}(C+G)\right)\left(q - \frac{1}{2}(A-B)(m+1-n) - \frac{1}{2}(C-G)\right)$$

$$\lambda m^2 + \mu m + \nu.$$

§11 Wenn daher also ein unendlicher Kettenbruch von dieser Art vorgelegt war

$$p = Am + Bn + C$$

$$+\cfrac{Dn^2+En+F}{Am+B(n+1)+C+\cfrac{D(n+1)^2+E(n+1)+F}{Am+B(n+2)+C+\cfrac{D(n+2)^2+E(n+2)+F}{Am+B(n+3)+C+\text{etc.}}}}$$

in welchem sei

$$D=\frac{1}{4}(AA-BB),$$

und daher dieser andere gebildet wird

$$p=A(m+1)+Bn+C$$

$$+\cfrac{Dn^2+En+F}{A(m+1)+B(n+1)+C+\cfrac{D(n+1)^2+E(n+1)+F}{A(m+1)+B(n+2)+C+\cfrac{D(n+2)^2+E(n+2)+F}{A(m+1)+B(n+3)+C+\text{etc.}}}}$$

während anstelle von m überall $m+1$ geschrieben wird, kann zuerst die Relation zwischen p und q auf diese Weise angegeben werden: Es werde der Kürze wegen festgelegt

$$\frac{BB-AA+2BC+4E}{2A}=G$$

und

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{1}{4}(AA - BB),\\
\mu &= \frac{1}{4}(AA - BB) + \frac{1}{2}(AC - BG),\\
\nu &= \frac{1}{4}CC + \frac{1}{4}(C - G)(A + B) - \frac{1}{4}GG + F
\end{aligned}$$

oder

$$\nu = F + \frac{1}{4}(C - G)(A + B + C + G)$$

und es wird diese Relation gelten

$$\begin{gathered}
\left(p - \frac{1}{2}(A + B)(m + n) - \frac{1}{2}(C + G)\right)\left(q - \frac{1}{2}(A - B)(m + 1 - n) - \frac{1}{2}(C - G)\right)\\
\lambda m^2 + \mu m + \nu;
\end{gathered}$$

dann wird aber außerdem die Funktion p diesem anderen Kettenbruch gleich

$$\begin{gathered}
p = \frac{1}{2}(A + B)(m + n) + \frac{1}{2}(C + G)\\
+ \cfrac{\lambda m^2 + \mu m + \nu}{B(m + 1) + An + G + \cfrac{\lambda(m + 1)^2 + \mu(m + 1) + \nu}{B(m + 2) + An + G + \cfrac{\lambda(m + 2)^2 + \mu(m + 2) + \nu}{B(m + 3) + An + G + \text{etc.}}}}
\end{gathered}$$

§12 Die oben vorgelegten Beispiele entsprießen daher, wenn folgendes festgelegt wird

$$D = \frac{1}{4}(AA - BB) = 0.$$

Es sei also

$$B = A,$$

dass man diese Kettenbrüche hat

$$p = A(m+n) + \quad C \quad + \cfrac{En+F}{A(m+n+1)+C+\cfrac{E(n+1)+F}{A(m+n+2)+C+\cfrac{E(n+2)+F}{A(m+n+3)+C+\text{etc.}}}}$$

$$q = A(m+n+1)+C+\cfrac{En+F}{A(m+n+2)+C+\cfrac{E(n+1)+F}{A(m+n+3)+C+\cfrac{E(n+2)+F}{A(m+n+4)+C+\text{etc.}}}}$$

deren Relation nach Setzen von

$$G = C + \frac{2E}{A}$$

und

$$\mu = \frac{1}{2}A(C-G), \quad \nu = F + \frac{1}{4}(C-G)(2A+C+G)$$

oder

$$\mu = -E, \quad \nu = F - \frac{E}{2A}(2A + C + G)$$

sein wird

$$\left(p - A(m+n) - \frac{1}{2}(C+G)\right)\left(q - \frac{1}{2}(C-G)\right)$$
$$= \mu m + \nu,$$

und die Größe p wird auch auf eine andere Weise durch einen unendlichen Kettenbruch ausgedrückt werden:

$$p = A(m+n) + \frac{1}{2}(C+G)$$
$$+ \cfrac{\mu m + \nu}{A(m+n+1) + G + \cfrac{\mu(m+1)+\nu}{A(m+n+2) + G + \cfrac{\mu(m+2)+\nu}{A(m+n+3) + G + \text{etc.}}}}$$

§13 Weil also hier so die Zähler wie die Nenner eine arithmetische Progression festlegen, wollen wir deren Form vereinfachen und es seien die zwei unendlichen Kettenbrüche

$$p = a + \cfrac{f}{a + b + \cfrac{f+g}{a + 2b + \cfrac{f+2g}{a + 3b + \cfrac{f+3g}{a + 4b + \text{etc.}}}}}$$

$$q = a + b + \cfrac{f}{a + 2b + \cfrac{f + g}{a + 3b + \cfrac{f + 2g}{a + 4b + \cfrac{f + 3g}{a + 5b + \text{etc.}}}}}$$

so dass aus dem Bruch p der Bruch q entsteht, wenn anstelle von a der Wert $a+b$ geschrieben wird. Es wird also sein

$$A(m+n) + C = a, \quad En + F = f, \quad A = b, \quad E = g$$

und daher

$$C = a - b(m+n) \quad \text{und} \quad F = f - gn,$$

woher gefolgert wird

$$G = a - b(m+n) + \frac{2g}{b}, \quad C - G = \frac{-2g}{b},$$
$$C + G = 2a - 2b(m+n) + \frac{2g}{b};$$

dann

$$\mu = -g, \quad \nu = f - gn - g - \frac{g}{b}\left(a - b(m+n) + \frac{g}{b}\right)$$

oder

$$\nu = f - \frac{g(a+b)}{b} + gm - \frac{gg}{bb};$$

also

$$\mu m + \nu = f - \frac{g(a+b)}{b} - \frac{gg}{bb},$$
$$A(m+n) + \frac{1}{2}(C+G) = a + \frac{g}{b}$$

und

$$\frac{1}{2}(C-G) = -\frac{g}{b}.$$

Daher hat man zwischen p und q diese Relation

$$\left(p - a - \frac{g}{b}\right)\left(q + \frac{g}{b}\right) = f - \frac{g(a+b)}{b} - \frac{gg}{bb}$$

oder

$$pq + \frac{g}{b}p - \left(a + \frac{g}{b}\right)q = f - g,$$

woher man für p diesen Kettenbruch hat

$$p = a + \frac{g}{b} + \cfrac{f - \frac{g(a+b)}{b} - \frac{gg}{bb}}{a + b + \frac{2g}{b} + \cfrac{f - \frac{g(a+2b)}{b} - \frac{gg}{bb}}{a + 2b + \frac{2g}{b} + \cfrac{f - \frac{g(a+3b)}{b} - \frac{gg}{bb}}{a + 3b + \frac{2g}{b} + \text{etc.}}}}$$

§14 Um die Brüche zu beseitigen, wollen wir $g = bh$ setzen, dass wir diese Kettenbrüche haben

$$p = a + \cfrac{f}{a + b + \cfrac{f + bh}{a + 2b + \cfrac{f + 2bh}{a + 3b + \cfrac{f + 3bh}{a + 4b + \text{etc.}}}}}$$

$$q = a + b + \cfrac{f}{a + 2b + \cfrac{f + bh}{a + 3b + \cfrac{f + 2bh}{a + 4b + \cfrac{f + 3bh}{a + 5b + \text{etc.}}}}}$$

deren Relation sich so verhält, dass gilt

$$(p - a - h)(q + h) = f - (a + b)h - hh$$

und

$$pq + hp - (a + h)q = f - bh,$$

woher für p auch dieser Kettenbruch gefunden wird

$$p = a + h + \cfrac{f - (a + b)h - hh}{a + b + 2h + \cfrac{f - (a + 2b)h - hh}{a + 2b + 2h + \cfrac{f - (a + 3b)h - hh}{a + 3b + 2h + \text{etc.}}}}$$

Weil also dieser Kettenbruch dem ersten gleich ist, dieser aber abbricht, sooft galt

$$f = (a + ib)h + hh,$$

während i eine ganze positive Zahl bezeichnet, kann genauso oft der Wert des ersten rational ausgedrückt werden.

§15 Aus der zwischen p und q gefundenen Relation wird durch p auch q so ausgedrückt

$$q = -h + \frac{f - (a + b)h - hh}{-a - h + p},$$

und weil p aus q entspringt, wenn anstelle von a der Ausdruck $a - b$ geschrieben wird, wenn die vorausgehenden Terme der Reihe p, q, r etc. o, n, m etc. sind, wird gelten

$$\begin{aligned} p &= -h + \frac{f - ah - hh}{-a + b - h + o}, \\ q &= -h + \frac{f - (a - b)h - hh}{-a + 2b - h + n}, \\ n &= -h + \frac{f - (a - 2b)h - hh}{-a + 3b - h + m} \\ &\quad \text{etc.}, \end{aligned}$$

woher für p auch dieser Kettenbruch erhalten wird

$$p = -h + \cfrac{f - ah - hh}{b - a - 2h + \cfrac{f - (b - a)h - hh}{2b - a - 2h + \cfrac{f - (2b - a)h - hh}{3b - a - 2h + \text{etc.}}}}$$

welchen selben wir freilich aus unseren allgemeinen Formeln gefunden hätten, wenn wir oben in §12 $B=-A$ gesetzt hätten. Daher wird auch der Wert rational ausgedrückt werden können, sooft galt

$$hh=(ib-a)h+f,$$

wenn nicht zuällig in diesen Fällen der diesem verschwindenden Zähler unterworfene Nenner auch verschwindet.

§16 Aus dem vorgelegten Kettenbruch selbst

$$p=a+\cfrac{f}{a+b+\cfrac{f+bh}{a+2b+\cfrac{f+2bh}{a+3b+\text{etc.}}}}$$

kann unmittelbar ein anderer selbigem gleicher auf diese Weise abgeleitet werden. Weil nämlich gilt

$$p=a+\frac{f}{p'},\quad p'=a+b+\frac{f+bh}{p''},\quad p''=a+2b+\frac{f+2bh}{p'''}\quad \text{etc.}$$

wird durch Rückwärtsgehen sein

$$p_{\prime}=a-b+\frac{f-bh}{p},\quad p_{\prime\prime}=a-2b+\frac{f-2bh}{p_{\prime}},\quad p_{\prime\prime\prime}=a-3b+\frac{f-3bh}{p_{\prime\prime}}$$

und daher

$$p = \frac{f-bh}{b-a+p_{\prime}}, \quad p_{\prime} = \frac{f-2bh}{2b-a+p_{\prime\prime}}, \quad p_{\prime\prime} = \frac{f-3bh}{3b-a+p_{\prime\prime\prime}} \quad \text{etc.}$$

woher wir schließen

$$p = a + \cfrac{f-bh}{b-a+\cfrac{f-2bh}{2b-a+\cfrac{f-3bh}{3b-a+\cfrac{f-4bh}{4b-a+\text{etc.}}}}}$$

so dass auch in den Fällen $f = ibh$ der Wert rational dargeboten werden kann.

§17 Betrachte also diese vier einander gleichen Kettenbrüche:

$$\text{I.} \quad p = a + \cfrac{f}{a+b+\cfrac{f+bh}{a+2b+\cfrac{f+2bh}{a+3b+\cfrac{f+3bh}{a+4b+\text{etc.}}}}}$$

$$\text{II.} \quad p = a + \cfrac{f-bh}{b-a+\cfrac{f-2bh}{2b-a+\cfrac{f-3bh}{3b-a+\cfrac{f-4bh}{4b-a+\text{etc.}}}}}$$

$$\text{III.} \quad p = a + h + \cfrac{f-(a+b)h-hh}{a+b+2h+\cfrac{f-(a+2b)h-hh}{a+2b+2h+\cfrac{f-(a+3b)h-hh}{a+3b+2h+\text{etc.}}}}$$

$$\text{IV.}\quad p = -h + \cfrac{f - ah - hh}{b - a - 2h + \cfrac{f - (b-a)h - hh}{2b - a - 2h + \cfrac{f - (2b-a)h - hh}{3b - a - 2h + \text{etc.}}}}$$

§18 Damit wir an die anfangs vorgelegte Form näher herankommen, sei

$$a = m, \quad f = n; \quad b = 1, \quad \text{und} \quad h = 1$$

und wir werden haben:

$$\text{I.}\quad p = m + \cfrac{n}{m + 1 + \cfrac{n+1}{m + 2 + \cfrac{n+2}{m + 3 + \cfrac{n+3}{m + 4 + \text{etc.}}}}}$$

$$\text{II.}\quad p = + \cfrac{n-1}{-m + 1 + \cfrac{n-2}{-m + 2 + \cfrac{n-2}{-m + 3 + \cfrac{n-3}{-m + 4 + \text{etc.}}}}}$$

$$\text{III.}\quad p = m + 1 + \cfrac{n-m-2}{m + 3 + \cfrac{n-m-3}{m + 4 + \cfrac{n-m-4}{m + 5 + \cfrac{n-m-5}{m + 6 + \text{etc.}}}}}$$

$$\text{IV.}\quad p = -1 + \cfrac{n-m-1}{-m-1+\cfrac{n-m}{-m+\cfrac{n-m+1}{-m+1+\cfrac{n-m+2}{-m+2+\text{etc.}}}}}$$

Daher, während i eine ganze positive Zahl bezeichnet, die Null nicht ausgeschlossen, wird der Wert unseres Kettenbruches in diesen nachfolgenden Fällen rational ausgedrückt werden können

$$\text{I.}\quad n = i,\qquad \text{II.}\quad n = m+2+i,\qquad \text{III.}\quad n = m+1-i,$$

wenn nicht zufällig der oben erwähnte Umstand auftritt.

§19 Aus den Fällen $n = i$ wird wegen des erwähnten Umstandes, in welchem auch der Nenner ins Nichts übergeht, der Wert selten aufgefunden. Wenn nämlich $n = 1$ ist, in welchem Fall wird

$$p = m + \cfrac{1}{m+1+\cfrac{2}{m+2+\cfrac{3}{m+3+\cfrac{4}{m+4+\text{etc.}}}}}$$

ist gewiss nicht $p = 0$, auch wenn die zweite Form das zu zeigen scheint, woher wir versichern können, dass gilt

$$0 = 1 - m - \cfrac{1}{2 - m - \cfrac{2}{3 - m - \cfrac{3}{4 - m - \cfrac{4}{5 - m + \text{etc.}}}}}$$

Wenn daher die erste allgemeine Form auf diesen Fall angewendet wird, wird gelten

$$a = 1 - m, \quad b = 1, \quad f = -1, \quad \text{und} \quad h = -1,$$

woher die zweite gibt

$$p = \cfrac{1 - 1}{m + \cfrac{1}{m + 1 + \cfrac{2}{m + 2 + \text{etc.}}}}$$

die dritte hingegen

$$p = -m - \cfrac{m}{-m - \cfrac{1 - m}{1 - m - \cfrac{2 - m}{2 - m + \text{etc.}}}}$$

und die vierte

$$p = +1 - \cfrac{1 - m}{m - 2 - \cfrac{2 - m}{m - 1 - \cfrac{3 - m}{m - \text{etc.}}}}$$

welche also also dem Nichts gleich sind.

§20 Weil aus der zweiten Form §18 gilt

$$\frac{n-1}{p} = 1 - m + \cfrac{n-2}{2 - m + \cfrac{n-3}{3 - m + \cfrac{n-4}{4 - m + \text{etc.}}}}$$

wenn diese mit der ersten allgemeinen verglichen wird, wird sein

$$a = 1 - m, \quad b = 1, \quad f = n - 2, \quad \text{und} \quad h = -1,$$

woher die dritte Form liefert

$$\frac{n-1}{p} = -m + \cfrac{n-m-1}{-m + \cfrac{n-m}{1 - m + \cfrac{n-m+1}{2 - m + \cfrac{n-m+2}{3 - m + \text{etc.}}}}}$$

und die vierte

$$\frac{n-1}{p} = 1 + \cfrac{n-m-2}{m + 2 + \cfrac{n-m-3}{m + 3 + \cfrac{n-m-4}{m + 4 + \text{etc.}}}}$$

und so hat man zwei neue Ausdrücke für p; und auf die gleiche Weise können viele andere dargeboten werden.

§21 Nachdem aber der Wert von p gefunden worden ist, wird leicht dieser Kettenbruch bestimmt

$$x = m + \cfrac{n+1}{m+1+\cfrac{n+2}{m+2+\cfrac{n+3}{m+3+\text{etc.}}}}$$

Es werde nämlich dort $m-1$ anstelle von m geschrieben und festgelegt

$$q = m-1+\cfrac{n}{m+\cfrac{n+1}{m+1+\cfrac{n+2}{m+2+\text{etc.}}}} = m-1+\frac{n}{x};$$

aber aus der dritten wird sein

$$q = m+\cfrac{n-m-1}{m+2+\cfrac{n-m-2}{m+3+\cfrac{n-m-3}{m+4+\text{etc.}}}} = m+\frac{n-m-1}{p+1},$$

nach Gleichsetzen welcher zwei Werte von q wird

$$-1+\frac{n}{x} = \frac{n-m-1}{p+1}$$

und

$$\frac{n}{x} = \frac{n-m+p}{p+1}$$

und so

$$x = \frac{n(p+1)}{p-m+n}.$$

§22 Weil also nach Setzen von $n = m+2$ auch $p = m+1$ ist, wird gelten

$$m+1 = p = m + \cfrac{m+2}{m+1+\cfrac{m+3}{m+2+\cfrac{m+4}{m+3+\text{etc.}}}}$$

und auf die gleiche Weise durch Setzen von $n = m+3$, $n = m+4$ etc.

$$m+1+\frac{1}{m+3} = m + \cfrac{m+3}{m+1+\cfrac{m+4}{m+2+\cfrac{m+5}{m+3+\text{etc.}}}} = q,$$

$$m+1+\cfrac{2}{m+3+\cfrac{1}{m+4}} = m + \cfrac{m+4}{m+1+\cfrac{m+5}{m+2+\cfrac{m+6}{m+3+\text{etc.}}}} = r,$$

$$m+1+\cfrac{3}{m+3+\cfrac{2}{m+4+\cfrac{1}{m+5}}} = m + \cfrac{m+5}{m+1+\cfrac{m+6}{m+2+\cfrac{m+7}{m+3+\text{etc.}}}} = s,$$

$$m+1+\cfrac{4}{m+3+\cfrac{3}{m+4+\cfrac{2}{m+5+\cfrac{1}{m+6}}}} = m+\cfrac{m+6}{m+1+\cfrac{m+7}{m+2+\cfrac{m+8}{m+3+\text{etc.}}}} = t,$$

woher nach Setzen von $m = 1$ die oben bemerkten rationalen Fälle folgen. Diese Werte schreiten aber so fort, dass gilt

$$\begin{aligned} p &= m+1, & q &= \frac{(m+2)(p+1)}{p+2}, \\ r &= \frac{(m+3)(q+1)}{q+3}, & s &= \frac{(m+4)(p+1)}{r+4} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} q &= (m+2)\left(1-\frac{1}{p+2}\right), \\ r &= (m+3)\left(1-\frac{2}{q+3}\right), \\ s &= (m+2)\left(1-\frac{3}{r+4}\right) \\ &\text{etc.}, \end{aligned}$$

welche Ausdrücke auch so dargeboten werden können:

$$q = m + 2 - \cfrac{m+2}{m+3}$$

$$r = m + 3 - \cfrac{2(m+3)}{m + 5 - \cfrac{m+2}{m+3}}$$

$$s = m + 4 - \cfrac{3(m+4)}{m + 7 - \cfrac{2(m+3)}{m + 5 - \cfrac{m+2}{m+3}}}$$

Nach einer Entwicklung wird aber gefunden

$$\begin{aligned}
p &= m+1, \\
q &= \frac{(m+2)(m+3)}{m+3}, \\
r &= \frac{(m+3)(mm+5m+7)}{mm+7m+13}, \\
s &= \frac{(m+4)(m^3+9m^2+29m+34)}{m^3+12mm+50m+73}, \\
t &= \frac{(m+5)(m^4+14m^3+77m^2+200m+209)}{m^4+18m^3+125m^2+400m+501}.
\end{aligned}$$

§23 Es mögen p, q, r, s, t die im vorhergehenden Paragraphen dargebotenen Kettenbrüche bezeichnen und es sei

$$p = (m+1)\frac{a}{\alpha}, \quad q = (m+2)\frac{b}{\beta}, \quad r = (m+3)\frac{c}{\gamma} \quad \text{etc.;}$$

es wird gelten

$$a = 1, \quad \alpha = 1,$$

die übrigen Buchstaben hängen hingegen so voneinander ab, dass gilt

$$\begin{array}{ll} b = (m+1)a + \alpha, & \beta = (m+1)a + 2\alpha, \\ c = (m+2)b + \beta, & \gamma = (m+2)b + 3\beta, \\ d = (m+3)c + \gamma, & \delta = (m+3)c + 4\gamma, \\ e = (m+4)d + \beta, & \delta = (m+4)d + 5\beta, \\ \text{etc.} & \text{etc.,} \end{array}$$

woher die Relation zwischen den lateinischen und griechischen Buchstaben getrennt voneinander wie folgt erschlossen wird

$$\begin{array}{ll} b = (m+2)a & \beta = (m+3)\alpha \\ c = (m+4)b - 1(m+1)a, & \gamma = (m+5)\beta - 1(m+2)\alpha, \\ d = (m+6)c - 2(m+2)b, & \delta = (m+7)\gamma - 2(m+3)\beta, \\ e = (m+8)d - 3(m+3)c, & \varepsilon = (m+9)\delta - 3(m+4)\gamma, \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

Nachdem aber die Nenner α, β, γ, δ etc. gefunden worden sind, werden die Zähler sein

$$b = \beta - \alpha, \quad c = \gamma - 2\beta, \quad d = \delta - 3\gamma, \quad e = \varepsilon - 4\delta \quad \text{etc.}$$

Aber wenn die Zähler a, b, c, d, e schon gefunden worden sind, werden die

Nenner sein

$$\alpha = a, \quad \beta = 2b - (m+1)a, \quad \gamma = 3c - 2(m+2)b,$$
$$\delta = 4d - 3(m+3)c, \quad \varepsilon = 5e - 4(m+4)d \quad \text{etc.}$$

Wir haben aber gesehen, dass gilt

$$\begin{aligned}
a &= 1, & \alpha &= 1,\\
b &= m + 2, & \beta &= m + 3,\\
c &= m^2 + 5m + 7, & \gamma &= m^2 + 7m + 13,\\
d &= m^3 + 9m^2 + 29m + 34, & \delta &= m^3 + 12m^2 + 50m + 73,\\
e &= m^4 + 14m^3 + 77m^2 + 200m + 209, & \varepsilon &= m^4 + 18m^3 + 125m^2 + 400m + 501.
\end{aligned}$$

§24 Aus dem Wert irgendeines Kettenbruches aus §22 kann auch der Wert des vorhergehenden auf diese Weise bestimmt werden

$$p = \frac{m+2-2q}{q-(m+2)}, \quad q = \frac{m+3-3r}{r-(m+3)}, \quad r = \frac{m+4-4s}{s-(m+4)} \quad \text{etc.},$$

woher, wenn die geordnet fortschreitenden Kettenbrüche mit den Buchstaben O, N, M etc. bezeichnet werden, sein wird

$$O = \frac{m+1-p}{p-(m+1)}, \quad N = \frac{m}{O-m}, \quad M = \frac{m-1+N}{N-(m-1)}, \quad L = \frac{m-2+2M}{M-(m-2)} \quad \text{etc.}$$

Aber es ist

$$O = m + \cfrac{m+1}{m+1+\cfrac{m+2}{m+2+\cfrac{m+3}{m+3+\cfrac{m+4}{m+4+\text{etc.}}}}}$$

die übrigen äquivalenten Werte von welchem diese sind

$$O = \cfrac{m}{1-m+\cfrac{m-1}{2-m+\cfrac{m-2}{3-m+\cfrac{m-3}{4-m+\text{etc.}}}}}$$

$$O = m+1-\cfrac{1}{m+3-\cfrac{2}{m+4-\cfrac{3}{m+5-\cfrac{4}{m+6-\cfrac{5}{m+7-\text{etc.}}}}}}$$

Daher lässt sich aber kein endlicher Wert von O erwarten, weil er im Fall $m = 1$ gewiss transzendent ist, wie welcher ausfindig zu machen ist, wir nun darlegen wollen.

§25 Aus der ersten Form werden also diese Formen gebildet

$$O = m + \frac{m+1}{A}, \quad A = m+1+\frac{m+2}{B}, \quad B = m+2+\frac{m+3}{C} \quad \text{etc.}$$

und es wird sein

$$OA = mA + m + 1, \quad AB = (m+1)B + m + 2 \quad \text{etc.}$$

Es werde festgelegt

$$O = -1 + \frac{1}{\omega}, \quad A = -1 + \frac{1}{\alpha}, \quad B = -1 + \frac{1}{\beta} \quad \text{etc.}$$

und es werden diese Formeln aufgefunden werden

$$\alpha + (m+1)\omega = 1, \quad \beta + (m+2)\alpha = 1, \quad \gamma + (m+3)\beta = 1 \quad \text{etc.}$$

oder

$$\omega = \frac{1}{m+1} - \frac{\alpha}{m+1}, \quad \alpha = \frac{1}{m+2} - \frac{\beta}{m+2}, \quad \beta = \frac{1}{m+3} - \frac{\gamma}{m+3},$$

woher durch eine übliche Reihe wird

$$\omega = \frac{1}{m+1} - \frac{1}{(m+1)(m+2)}$$
$$+ \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)} - \frac{1}{(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)} + \text{etc.},$$

deren Wert dieser ist,

$$\omega = \frac{1}{e} \int e^z z^m dz,$$

nachdem dieses Integral so genommen worden ist, dass es nach Setzen von $z = 0$ verschwindet, wonach $z = 1$ gesetzt werden muss. Daher wird in den

Fällen, in denen m eine ganze Zahl ist, gelten:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{ist } m=0, \text{ so gilt } \omega = \dfrac{e-1}{e} & \text{und } O = \dfrac{1}{e-1}; & & \\
\text{ist } m=1, \text{ so gilt } \omega = \dfrac{1}{e} & \text{und } O = e-1; & & \\
\text{ist } m=2, \text{ so gilt } \omega = \dfrac{e-2}{e} & \text{und } O = \dfrac{2}{e-2}; & & \\
\text{ist } m=3, \text{ so gilt } \omega = \dfrac{-2e+6}{e} & \text{und } O = \dfrac{3e-6}{6-2e} & = \dfrac{3(e-2)}{2(3-e)}; & \\
\text{ist } m=4, \text{ so gilt } \omega = \dfrac{9e-24}{e} & \text{und } O = \dfrac{24-8e}{9e-24} & = \dfrac{4(6-2e)}{3(3e-8)} & = \dfrac{8(3-e)}{3(3e-8)}; \\
\text{ist } m=5, \text{ so gilt } \omega = \dfrac{120-44e}{e} & \text{und } O = \dfrac{45e-120}{120-44e} & = \dfrac{5(9e-24)}{4(30-11e)} & = \dfrac{15(3e-8)}{4(30-11e)}; \\
\text{ist } m=6, \text{ so gilt } \omega = \dfrac{265e-720}{e} & \text{und } O = \dfrac{720-264e}{265e-720} & = \dfrac{6(120-44e)}{5(53e-144)} & = \dfrac{24(30-11e)}{5(53e-144)}; \\
\text{ist } m=7, \text{ so gilt } \omega = \dfrac{5040-1854}{e} & \text{und } O = \dfrac{1855e-5040}{5040-1854e} & = \dfrac{7(265e-720)}{6(720-309e)} & = \dfrac{35(53e-144)}{6(720-309e)}.
\end{array}
$$

Wenn m keine ganze Zahl ist, kann der Wert von O durch die Zahl e, deren Logarithmus $= 1$ ist, nicht ausgedrückt werden.

§26 Wir wollen festlegen

$$m = 0,$$

worauf alle Fälle, in denen m eine ganze Zahl ist, bezogen werden können, und es wird sein

$$O = \frac{1}{e-1}, \quad N = 0, \quad M = -1, \quad L = \frac{-2+2m}{M+2} = -4$$

$$
\begin{aligned}
K &= \frac{-3+3L}{L+3} = 15, \quad & I &= \frac{-4+4K}{K+4} = -4,\\
H &= \frac{-5+5I}{I+5} = \frac{185}{151}, \quad & G &= \frac{-6+6H}{H+6} = -\frac{204}{1091},
\end{aligned}
$$

woher die folgenden Kettenbrüche entspringen

$$
\begin{aligned}
1 &= 0 + \cfrac{2}{1 + \cfrac{3}{2 + \cfrac{4}{3 + \text{etc.}}}}\\
\frac{1}{-1} &= 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \text{etc.}}}}\\
\frac{4}{3} &= 0 + \cfrac{3}{1 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{5}{3 + \text{etc.}}}}\\
0 &= 0 + \cfrac{0}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \text{etc.}}}}\\
\frac{21}{13} &= 0 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{5}{2 + \cfrac{6}{3 + \text{etc.}}}}
\end{aligned}
$$

$$-1 \quad = 0 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{0}{2 + \cfrac{1}{3 + \text{etc.}}}}$$

$$\frac{136}{73} = 0 + \cfrac{5}{1 + \cfrac{6}{2 + \cfrac{7}{3 + \text{etc.}}}}$$

$$-4 \quad = 0 - \cfrac{2}{1 - \cfrac{1}{2 + \cfrac{0}{3 + \text{etc.}}}}$$

$$\frac{1045}{501} = 0 + \cfrac{6}{1 + \cfrac{7}{2 + \cfrac{8}{3 + \text{etc.}}}}$$

$$15 \quad = 0 - \cfrac{3}{1 - \cfrac{2}{2 - \cfrac{1}{3 - \text{etc.}}}}$$

welchen diese hinzugefügt werden können:

$$\frac{1}{e-1} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \text{etc.}}}}$$

$$\frac{1}{e-2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{2}{3 + \cfrac{3}{4 + \text{etc.}}}}$$

$$\frac{1}{2e-5} = 2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{2}{4 + \cfrac{3}{5 + \text{etc.}}}}$$

$$\frac{1}{6e-16} = 3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{2}{5 + \cfrac{3}{6 + \text{etc.}}}}$$

$$\frac{1}{24e-65} = 4 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{2}{6 + \cfrac{3}{7 + \text{etc.}}}}$$

$$\frac{1}{120e-326} = 5 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{2}{7 + \cfrac{3}{8 + \text{etc.}}}}$$

Wenn nämlich gilt

$$x = m + \cfrac{1}{m+1+\cfrac{2}{m+2+\cfrac{3}{m+3+\text{etc.}}}}$$

$$= m+1 - \cfrac{m+1}{m+3-\cfrac{m+2}{m+4-\cfrac{m+3}{m+5-\text{etc.}}}}$$

$$y = m+1+\cfrac{1}{m+2+\cfrac{2}{m+3+\cfrac{3}{m+4+\text{etc.}}}}$$

$$= m+2-\cfrac{m+2}{m+4-\cfrac{m+3}{m+5-\cfrac{m+4}{m+6-\text{etc.}}}}$$

wird sein

$$y = \frac{x}{m+1-x}.$$

§27 Aber unsere Untersuchungen erstrecken sich um Vieles weiter; um diese genauer zu entwickeln, wollen wir zu den Formeln in §11 zurückkehren, die nichts von ihrer Allgemeinheit verlieren, auch wenn wir die Zahlen m und n dem Nichts gleich setzen. Daher werden die zu betrachtenden Kettenbrüche diese sein:

$$p = C + \cfrac{F}{C + B + \cfrac{F+E+D}{C+2B+\cfrac{F+2E+4D}{C+3B+\cfrac{F+3E+9D}{C+4B+\text{etc.}}}}}$$

$$q = C + A + \cfrac{F}{C + A + B + \cfrac{F+E+D}{C+A+2B+\cfrac{F+2E+4D}{C+A+3B+\cfrac{F+3E+9D}{C+A+4B+\text{etc.}}}}}$$

$$r = C + 2A + \cfrac{F}{C + 2A + B + \cfrac{F+E+D}{C+2A+2B+\cfrac{F+2E+4D}{C+2A+3B+\cfrac{F+3E+9D}{C+2A+4B+\text{etc.}}}}}$$

welche Formen ununterbrochen weiter fortgesetzt werden, indem $C + A$ anstelle von C geschrieben wird. In den einzelnen Brüchen legen also die Nenner eine arithmetische Progression, die Zähler hingegen eine Progression zweiter Ordnung fest, deren zweite Differenzen konstant sind. Hier nehmen wir aber an, dass gilt

$$D = \frac{1}{4}(AA - BB).$$

Wenn wir daher der Kürze wegen festlegen

$$G = \frac{BB - AA + 2BC + 4E}{2A} = \frac{BC - 2D + 2E}{A}$$

und

$$\lambda = \frac{1}{4}(AA - BB) = D,$$

$$\mu = \frac{1}{4}(AA - BB) + \frac{1}{2}(AC - BG) = \frac{(A + B + 2C)D - BE}{A},$$

$$\nu = F + \frac{1}{4}(C - G)(A + B + C + G)$$

oder

$$\nu = F + \frac{CD(A + C) + DD - EE}{AA} + \frac{B(A + B + 2C)(D - E)}{2AA},$$

wird sein

$$\left(p - \frac{(A + B)(C + 2D - 2E)}{2A}\right)\left(q - \frac{(A - B)(A + C) - 2C(D - E)}{2A}\right) = \nu$$

und daher durch einen anderen Kettenbruch

$$p = \frac{1}{2}(C + G) + \cfrac{\nu}{G + B + \cfrac{\nu + \mu + \lambda}{G + 2B + \cfrac{\nu + 2\mu + 4\lambda}{G + 3B + \text{etc.}}}}$$

§28 Nachdem also irgendein Kettenbruch von dieser Form vorgelegt worden ist

$$p = a + \cfrac{f}{a + b + \cfrac{f+g}{a + 2b + \cfrac{f+2g+h}{a + 3b + \cfrac{f+3g+3h}{a + 4b + \cfrac{f+4g+6h}{a+5b+\text{etc.}}}}}}$$

kann er in eine andere selbigem gleiche verwandelt werden. Nach Anstellen eines Vergleiches ist nämlich

$$C = a, \quad B = b, \quad F = f, \quad E = g - \frac{1}{2}h, \quad D = \frac{1}{2}.$$

Man nehme also

$$A = \sqrt{bb + 2h},$$

dann aber

$$G = \frac{ab + 2g - 2h}{A},$$

$$\lambda = \frac{1}{2}h, \quad \mu = \frac{1}{2}h + \frac{1}{2}(Aa - Gb) = \frac{1}{2}h + \frac{ah - b(g-h)}{A},$$

$$\nu = f + \frac{ah - b(g-h)}{2A} + \frac{aah - bb(g-h) - 2ab(g-h) - 2g(g-h)}{2AA}$$

und daher wird werden

$$p = \frac{1}{2}(a+G) + \cfrac{\nu}{G+b+\cfrac{\nu+\mu+\lambda}{G+2b+\cfrac{\nu+2\mu+4\lambda}{G+3b+\cfrac{\nu+3\mu+9\lambda}{G+4b+\text{etc.}}}}}$$

§29 Wenn also $f = 0$ war, ist der Wert dieses letzten Kettenbruches gewiss $= a$, welche Zahlen auch immer den übrigen Buchstaben zugeteilt werden. Man setze also

$$g - h = k,$$

dass gilt

$$A = \sqrt{bb+2h}, \quad G = \frac{ab+2k}{A},$$

$$\lambda = \frac{1}{2}h, \quad \mu = \frac{1}{2}h + \frac{ah-bk}{A} \quad \text{und} \quad \nu = \frac{ah-bk}{2A} + \frac{aah-bqk-2abk-2hk-2kk}{2AA},$$

und es wird sein

$$\frac{1}{2}(a+G) = G + \cfrac{\nu}{G+b+\cfrac{\nu+\mu+\lambda}{G+2b+\cfrac{\nu+2\mu+4\lambda}{G+3b+\cfrac{\nu+3\mu+9\lambda}{G+4b+\text{etc.}}}}}$$

wo, wenn die Buchstaben a, b, A und G für gegeben gehalten werden, sein wird

$$\lambda = \frac{AA - bb}{4}, \quad \mu = \lambda + \frac{Aa - Gb}{2} = \frac{AA - bb}{4} + \frac{Aa - Gb}{2},$$

$$\nu = \frac{aa + ab + Aa + Gb - AG - GG}{4} = \frac{1}{4}(a - G)(a + b + A + G),$$

daher

$$\begin{aligned}
\nu + \ \mu + \ + \lambda &= \frac{1}{4}(a - \ b + \ A - g)(a + 2b + 2A + G),\\
\nu + 2\mu + 4 + \lambda &= \frac{1}{4}(a - 2b + 2A - g)(a + 3b + 3A + G),\\
\nu + 3\mu + 9 + \lambda &= \frac{1}{4}(a - 3b + 3A - g)(a + 4b + 4A + G).
\end{aligned}$$

Um die Formeln zusammenzuziehen, setze man

$$a - G = 2\alpha, \quad A - b = 2\gamma, \quad a + G = 2\beta, \quad A + b = 2\delta \quad \text{etc.};$$

es wird sein

$$a = \cfrac{\alpha(\beta + \delta)}{\beta - \alpha + (\delta - \gamma) + \cfrac{(\alpha + \gamma)(\beta + 2\delta)}{\beta - \alpha + 2(\delta - \gamma) + \cfrac{(\alpha + 2\gamma)(\beta + 3\delta)}{\beta - \alpha + 3(\delta - \gamma) + \cfrac{(\alpha + 3\gamma)(\beta + 4\delta)}{\beta - \alpha + 4(\delta - \gamma) + \text{etc.}}}}}$$

dessen Gültigkeit sich in vielen Beispielen von selbst zeigt.

§30 Wenn dieselben Festlegungen beibehalten werden, die Zahl f aber nicht dem Nichts gleich genommen wird, wird man diesen Kettenbruch haben

$$p = \alpha + \beta + \cfrac{f}{\alpha+\beta+(\delta-\gamma)+\cfrac{f+(\beta\gamma-\alpha\delta)+2\gamma\delta}{\alpha+\beta+2(\delta-\gamma)+\cfrac{f+2(\beta\gamma-\alpha\delta)+6\gamma\delta}{\alpha+\beta+3(\delta+\gamma)+\cfrac{f+3(\beta\gamma-\alpha\delta)+12\gamma\delta}{\alpha+\beta+4(\delta+\gamma)+\text{etc.}}}}}$$

welcher in diesen selbigem gleichen verwandelt wird

$$p = \beta + \cfrac{f+\alpha(\beta+\delta)}{\beta-\alpha+(\delta-\gamma)+\cfrac{f+(\alpha+\gamma)(\beta+2\delta)}{\beta-\alpha+2(\delta-\gamma)+\cfrac{f+(\alpha+2\gamma)(\beta+3\delta)}{\beta-\alpha+3(\delta-\gamma)+\cfrac{f+f+(\alpha+3\gamma)(\beta+4\delta)}{\beta-\alpha+4(\delta+\gamma)+\text{etc.}}}}}$$

woher, wenn entweder γ oder δ verschwindend angenommen wird, der zuvor behandelte Fall hervorgeht. Aber diese Gleichheit der zwei Kettenbrüche umfasst alles, was bisher dargelegt worden ist, in sich.

§31 Aus diesen entspringen die Formen, die wir mit dem Buchstaben q bezeichnet haben, wenn wir anstelle von α und β respektive $\alpha+\gamma$ und $\beta+\delta$ schreiben, so dass gilt

$$q = \alpha + \beta + \gamma + \delta$$

$$+\cfrac{f}{\alpha+\beta+2\delta+\cfrac{f+(\beta\gamma-\alpha\delta)+2\gamma\delta}{\alpha+\beta-\gamma+3\delta+\cfrac{f+2(\beta\gamma-\alpha\delta)+6\gamma\delta}{\alpha+\beta-2\gamma+4\delta+\cfrac{f+3(\beta\gamma-\alpha\delta)+12\gamma\delta}{\alpha+\beta-3\gamma+5\delta+\text{etc.}}}}}$$

und ebenso

$$q=\beta+\delta+\cfrac{f+(\alpha+\gamma)(\beta+2\delta)}{\beta-\alpha+2(\delta-\gamma)+\cfrac{f+(\alpha+2\gamma)(\beta+3\delta)}{\beta-\alpha+3(\delta-\gamma)+\cfrac{f+(\alpha+3\gamma)(\beta+4\delta)}{\beta-\alpha+4(\delta-\gamma)+\text{etc.}}}}$$

so dass zwischen diesen zwei Ausdrücken diese Relation bestehet

$$(p-\beta)(q-\alpha-\gamma)=f+\alpha(\beta+\delta)$$

oder

$$pq-(\alpha+\gamma)p-\beta q+\beta\gamma-\alpha\delta=f,$$

mit deren Hilfe die Gleichheit der zwei oberen Gleichungen mit der Substitutionsmethode, die wir oben gebraucht haben, bewiesen werden kann.

§32 Wenn wir setzen

$$f+\alpha(\beta+\delta)=g,$$

dass gilt

$$f = g - \alpha(\beta + \delta),$$

wird sich die erste Form so verhalten

$$p = \alpha + \beta + \cfrac{g - (\beta + \delta)}{\alpha + \beta + (\delta - \gamma) + \cfrac{g - (\alpha - \gamma)(\beta + 2\delta)}{\alpha + \beta + 2(\delta - \gamma) + \cfrac{g - (\alpha - 2\gamma)(\beta + 3\delta)}{\alpha + \beta + 3(\delta - \gamma) + \cfrac{g - (\alpha - 3\gamma)(\beta + 4\delta)}{\alpha + \beta + 4(\delta - \gamma) + \text{etc.}}}}}$$

welcher diese gleich ist

$$p = \beta + \cfrac{f + \alpha(\beta + \gamma)}{\beta - \alpha + (\delta - \gamma) + \cfrac{f + (\alpha + \gamma)(\beta + 2\delta)}{\beta - \alpha + 2(\delta - \gamma) + \cfrac{f + (\alpha + 2\gamma)(\beta + 3\delta)}{\beta - \alpha + 3(\delta - \gamma) + \cfrac{f + (\alpha + 3\gamma)(\beta + 4\delta)}{\beta - \alpha + 4(\delta - \gamma) + \text{etc.}}}}}$$

Und diese Formen scheint im höchsten Maße geeignet, dass deren Gleichheit mit einer direkten Methode ermittelt und bewiesen werden kann. Aber eine solche Methode wird immer noch vermisst. Aber es besteht kein Zweifel, dass sich nach ihrer Entdeckung viele wunderschöne Zuwäche für die Analysis erwarten lassen. Weil also die erste Form endlich wird, wenn galt

$$g = (\alpha - i\gamma)(\beta + (i+1)\delta),$$

sehen wir auch ein, dass der Wert der zweiten rational ausgerückt werden kann, sooft galt

$$f = (\alpha - i\gamma)(\beta + (i+1)\delta) - \alpha(\beta + \delta)$$

oder

$$f = i(\alpha\delta - \beta\gamma - (i+1)\gamma\delta),$$

während i irgendeine ganze Zahl bezeichnet.